Das Kuramoto-Modell

- Vorstellung des Modells
- Analyse bei Mittlerer-Feld-Kopplung
  - Inkohärenz
  - Synchronisierung
  - partielle Synchronisierung
- Erweiterungen des Modells
- Anwendungsmöglichkeiten

Das Kuramoto-Modell

Es gibt N unabhängige Oszillatoren, die mit der Frequenz ω_i schwingen und die nach folgender Beziehung untereinander gekoppelt sind:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^{N} K_{ij} \sin\left(\theta_j - \theta_i\right), \quad i = 1, \ldots, N$$

schwache Kopplung K_{ij} ➠ Oszillatoren unabhängig

Überschreitet die Kopplung eine kritische Grenze K_c
➠ spontane Synchronisierung der Oszillatoren

Für die Form der Kopplung K_{ij} kann man verschiedene Modelle in Betracht ziehen:

Mittlere-Feld-Kopplung, Kopplung nächster Nachbarn,
hierarchische Kopplung,
zufällige langreichweitige Kopplung,
zustandsabhängige Kopplung, etc.

Mittlere-Feld-Kopplung

Definition des Kopplungsparameters:

$$K_{ij} = \frac{K}{N} > 0$$

Messung der Synchronisierung durch komplexen Ordnungsparameter:

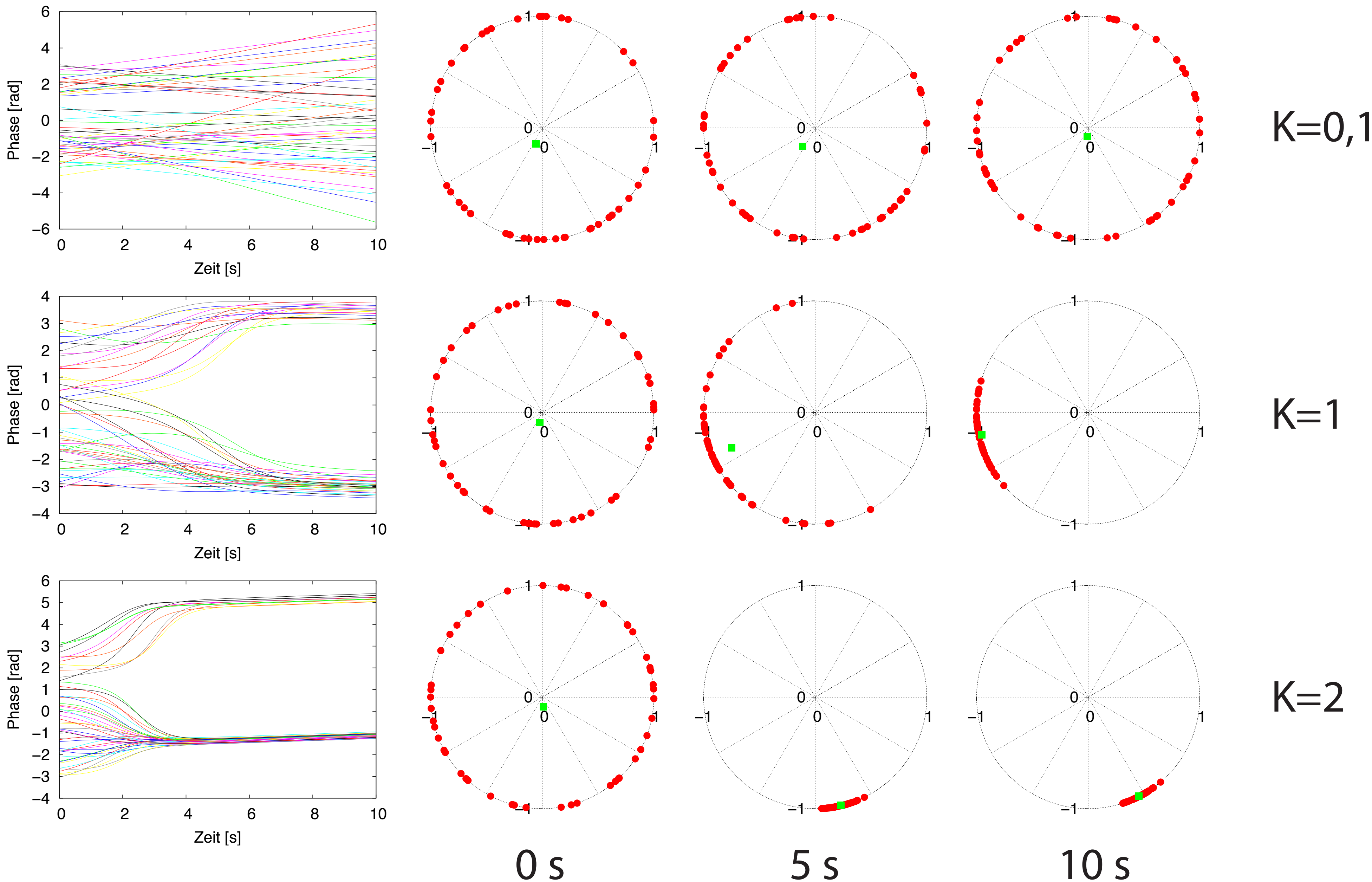
$$r\, e^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j} \qquad \text{mit } r\text{: Kohärenz und } \quad \psi\text{: mittl. Phase}$$

Für $N = \infty$ verschwindet dieser Parameter, falls die Oszillatoren nicht synchronisiert sind.

Eingesetzt in die Modelldefinition ergibt sich:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + K\, r \sin(\psi - \theta_i)\,, \qquad i = 1, \ldots, N$$

Simulation von 50 Oszillatoren



Mittlere-Feld-Kopplung, Kontinuum

Übergang auf ein Kontinuum:

$$r\, e^{i\,\psi} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta} \rho(\theta, \omega, t) g(\omega)\, d\theta\, d\omega$$

zusätzlich gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\left[\underbrace{\omega + K\, r \sin(\psi - \theta)}_{=v}\right] \rho\right) = 0$$

und die Normierungsbedingung

$$\int_{-\pi}^{\pi} \rho\,(\theta, \omega, t)\; d\theta = 1$$

man erhält als triviale Lösung die inkohärente Lösung:

$$\rho = \frac{1}{2\pi}, \qquad r = 0$$

Mittlere-Feld-Kopplung, Grenzfälle

- für $K \to 0$ ist $\theta_i = \omega_i t + \theta_i(0)$
  für den Ordnungsparameter ergibt sich dann

$$r e^{i\psi} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \rho(\omega t, \omega, t) g(\omega)\, d\omega$$

  und für $t \to \infty$ geht $r \to 0$

- für $K \to \infty$ ist $\theta_i = \psi$ (synchronisierte Oszillatoren)
  also gilt

$$r e^{i\psi} = e^{i\psi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\theta, \omega, t) g(\omega)\, d\theta\, d\omega = e^{i\psi}$$

  und somit $r \to 1$

Mittlere-Feld-Kopplung, allgemein

für $K_c < K < \infty$ sind Teile der Oszillatoren synchronisiert.

Ein solcher Oszillator mit $v = \omega - K\, r \sin(\psi - \theta)$

ist stabil unter folgenden Bedingungen

$$\omega \approx K\, r \sin(\psi - \theta) \quad \text{und} \quad -\frac{\pi}{2} \leq (\psi - \theta) \leq \frac{\pi}{2} \quad .$$

Oszillatoren mit $|\omega| > K\, r$ können nicht synchronisiert werden.

Man kann die rechte Seite der Gleichung für den Ordnungsparameter nach längerer Rechnung lösen:

$$r = K\, r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta \, g(K\, r \sin \theta)\, d\theta$$

Man erhält die triviale Lösung $r = 0$ und für $K > K_c$ einen Ast mit r > 0 und der allgemeinen Lösung für K_c:

$$K_c = \frac{2}{\pi \; g(0)}$$

Mittlere-Feld-Kopplung

Für eine Lorentzverteilung der Frequenzen

$$g(\omega) = \frac{\gamma / \pi}{\gamma^2 + \omega^2}$$

gibt es nach Kuramoto (1975) das exakte Ergebnis

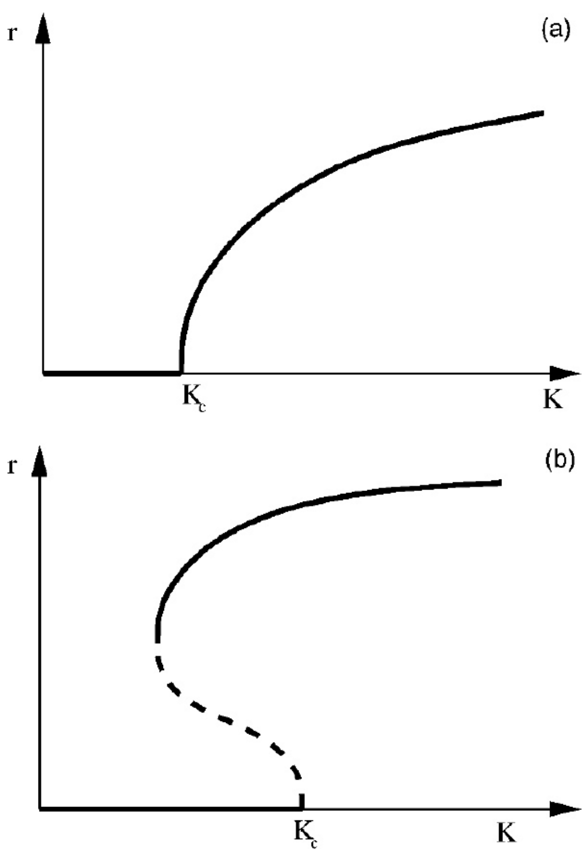
$$r = \sqrt{1 - (K_c / K)} \quad \text{für} \quad K > K_c = 2\gamma$$

Für ein allgemeines $g(\omega)$ gilt näherungsweise

$$r \sim \sqrt{\frac{-16(K - K_c)}{\pi K_c^4 g''(0)}}$$

für $K \to K_c$.

Verhalten der Bifurkation ist vom Vorzeichen von $g''(0)$ abhängig.



Erweiterungen des Modells

Einführung von Rauschen

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \xi_i(t) + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j - \theta_i)$$

mit

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \qquad \left\langle \xi_i(t)\xi_j(t') \right\rangle = 2D\,\delta(t-t')\,\delta_{ij}$$

und einer Fokker-Planck-Gleichung für die Ein-Oszillator-Dichte:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta^2} - \frac{\partial}{\partial \theta}(v\rho) \quad \text{mit} \quad v(\theta, \omega, t) = \omega + K\,r\,\sin(\psi - \theta)$$

Mögliche Anwendung des Kuramoto-Modells

- **Neuronale Netze**
  Aufklärung von Mechanismen bei verteilter neuronaler Aktivität ➠ visueller Kortex
- **Beschreibung von Arrays von Josephson-Kontakten**
  zur Verstärkung der Ausgangsleistung
  Parallelschaltung: Kopplung nächster Nachbarn (diffusiv)
  Serienschaltung: globale Kopplung ➠ Kuramoto-Modell
- **Beschreibung von Laserarrays**
  ähnlich Kuramoto-Modell mit Zeitverzögerung
- **etc.**

Periodisch gepoltes $LiNbO_3$ (PPLN) in der nichtlinearen Optik

- Grundlagen der Nichtlinearen Optik
- Nichtlineare optische Suszeptibilität
- Erzeugung von zweiten Harmonischen
  ➠ Notwendigkeit der Phasenanpassung
- Quasi-Phasenanpassung mit Hilfe von periodisch gepoltem $LiNbO_3$
- experimentelle Details

Grundlagen der nichtlinearen Optik

In isotropen Medien ist die Polarisation proportional zum externen Feld:

$$P(t) = \epsilon_0 \chi^{(1)} E(t)$$ ohne Absorption und Dispersion

Reihenentwicklung obiger Beziehung

$$P(t) = \epsilon_0 \left(\chi^{(1)} E(t) + \chi^{(2)} E^2(t) + \chi^{(3)} E^3(t) + \ldots \right)$$

Zusammenfassung in Potenzen von E mit Ansatz:

$$E(t) = E_0 \cos \omega t = 1/2 E_0 \left(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t} \right)$$

Erzeugung zweiter Harmonischer

$$\begin{aligned} P &= \epsilon_0 \chi^{(1)} E_0 \cos \omega t + \\ &+ \epsilon_0 \chi^{(2)} 1/2 E_0^2 \left(1 + \cos 2\omega t\right) + \\ &+ \epsilon_0 \chi^{(3)} 1/4 E_0^3 \left(3 \cos \omega t + \cos 3\omega t\right) \\ &+ \ldots \end{aligned}$$

Erzeugung dritter Harmonischer

intensitätsabhängiger Brechungsindex

Berücksichtigung der Materialeigenschaften

reale Medien besitzen Absorption & Dispersion

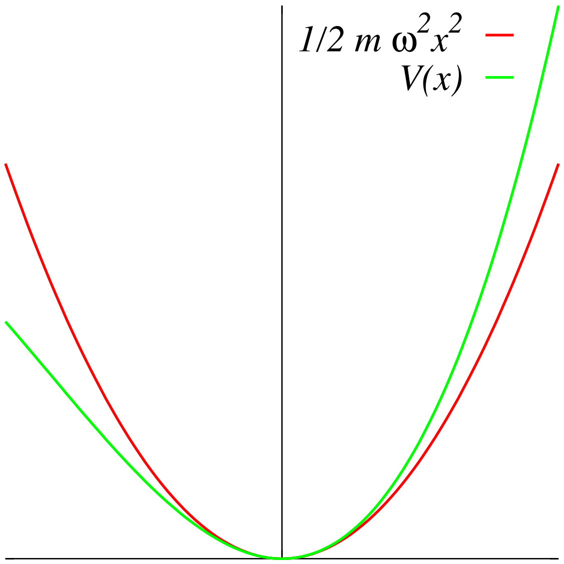
Ansatz: Lösung des Lorentz Oszillators für ein anharmonisches Potential.

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dV(x)}{dx} = \frac{e}{m}E(t)$$

mit Reihenentwicklung des Potentials

$$\Rightarrow \quad F = -\frac{dV}{dx} = -m\omega x^2 - 3Ax^2 - \ldots$$

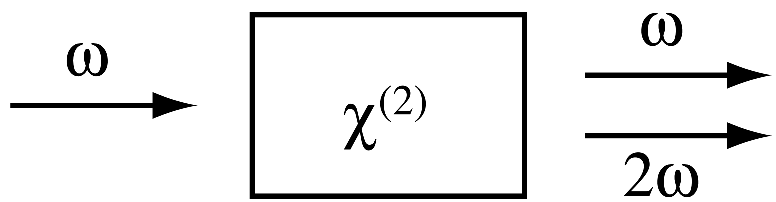
Perturbative Lösung (nl-Terme sind klein)



reale Medien sind nicht isotrop:

Suszeptibilitäten sind Tensorgrößen

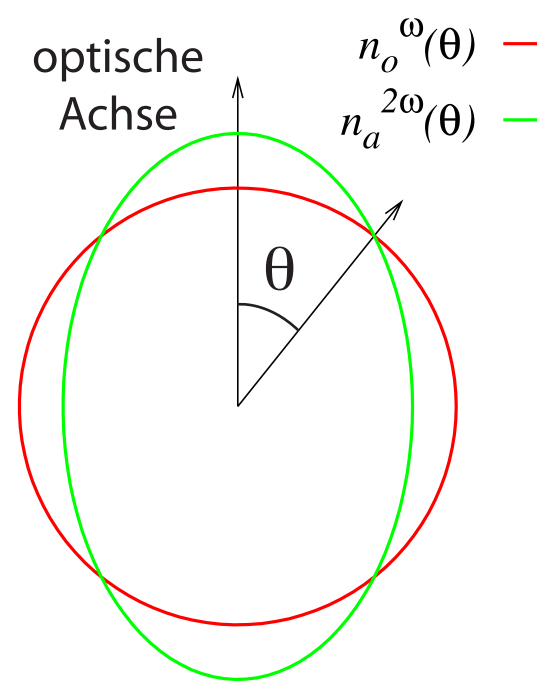
Erzeugung zweiter Harmonischer



da typischerweise $n(\omega) \neq n(2\omega)$ und somit $\Delta k = 2k_\omega - k_{2\omega} \neq 0$ besteht keine feste Phasenbeziehung zwischen einfallendem Strahl und zweiter Harmonischer

➠ schwache Konversion:

$$I_{2\omega}(l) = \Gamma^2 I_\omega(0) l^2 \frac{\sin^2(\Delta k\, l/2)}{(\Delta k\, l/2)^2}$$



mögliche Lösung:

Phasenanpassung in doppelbrechendem Kristall

NLO in doppelbrechenden Medien

- Poynting- und **k**-Vektor sind nicht parallel
  ➠ Walk-off des Strahls
- erreichbare nichtlineare Koeffizienten sind klein
- Strahlwinkel und Temperatur des Mediums sind wellenlängenabhängig und eingeschränkt

Nichtlineare Effekte mit periodisch modulierten Materialeigenschaften

- Idee: Armstrong [Phys. Rev. **127**, 1918 (1962)], bereits vor der Verwendung von doppelbrechenden Kristallen
- zu dieser Zeit keine Möglichkeit der Herstellung

Quasi-Phasenanpassung (QPM)

$LiNbO_3$: transparent von 0.35 bis >4 µm

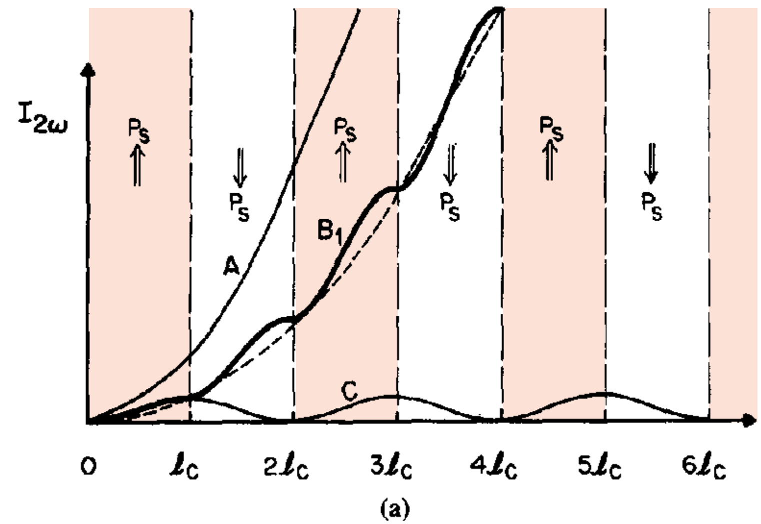
Antiparallele ferroelektrische Domänen ➠ Vorzeichenwechsel in nichtlinearen Koef-fizienten

Fundamentale Welle: ω_1
Polarisationswelle: $\omega_2 = 2\omega_1$ $\Big\}\ n_1$
zweite Harmonische: ω_2 $\quad n_2$

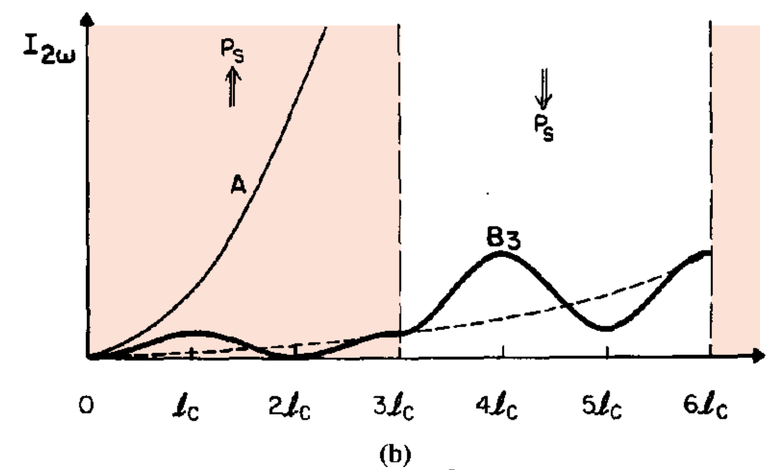
„Kohärenzlänge“ $l_c = \lambda/4(n_2 - n_1)$ bestimmt Energietransport

Abfolge von Domänen mit jeweils antiparalleler spontaner Polarisation P_S

QPM 1. Ordnung



Fejer et. al., IQJE **28**, 2631 (1992)



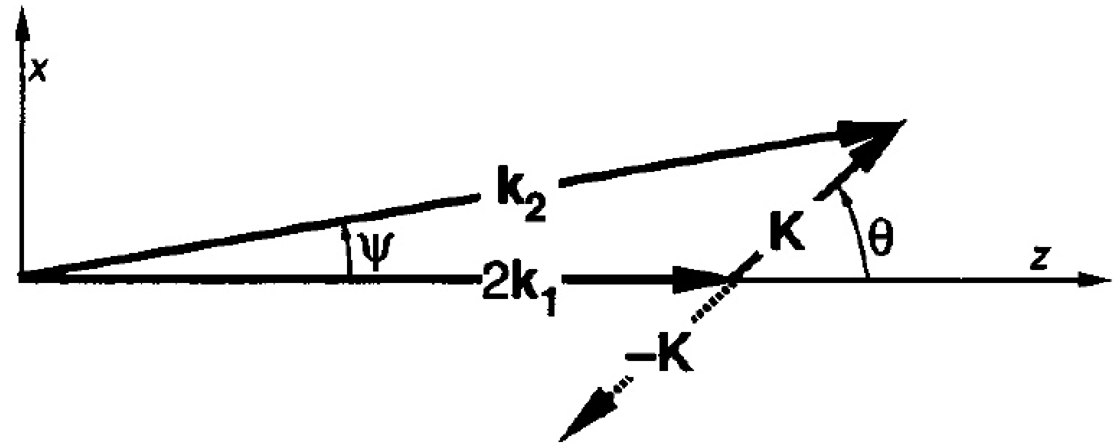
QPM 3. Ordnung

Quasi-Phasenanpassung im k-Raum

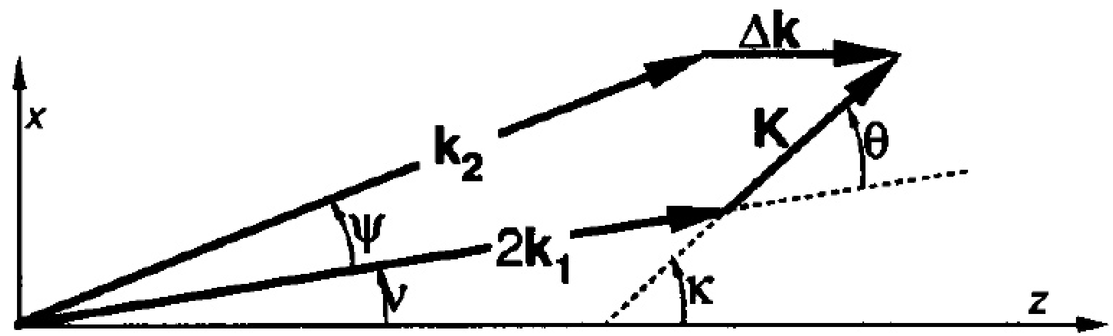
QPM kann auch in isotropen Medien erreicht werden.

Gittervektor **K** der Modulierung.

Wie bei der Phasenanpassung in doppelbrechenden Kristallen ➠ Abhängigkeit vom Einfallswinkel



(a)

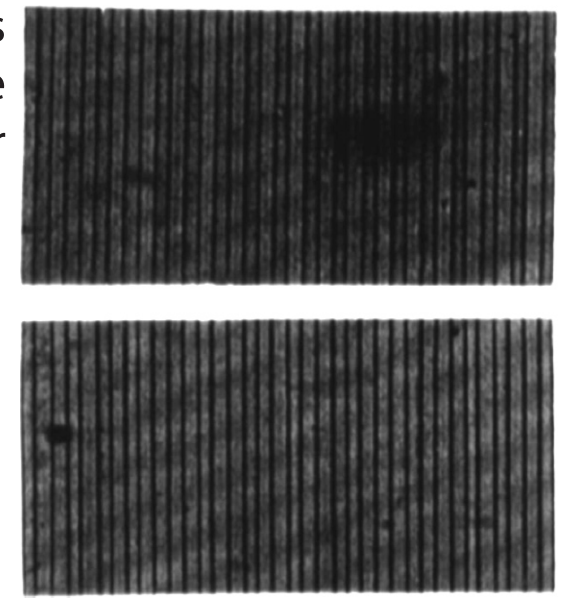


(b)

Fejer et. al., IQJE **28**, 2631 (1992)

Verwendung periodisch gepolter Kristalle

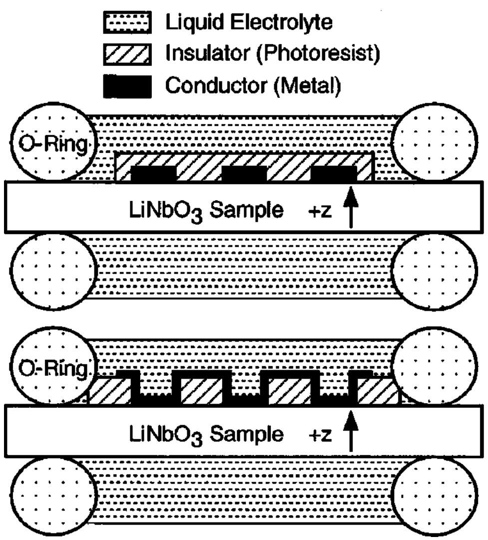
mit HF geätztes PPLN zeigt die Domänenstruktur



a

b

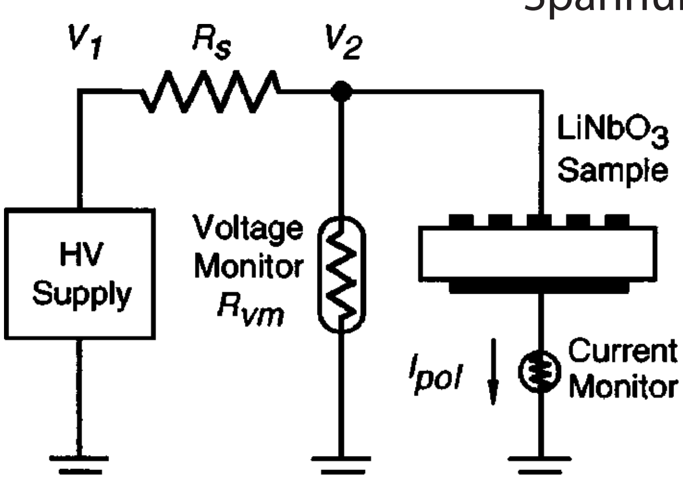
Pruneri et al. OL **20**, 2375(1995)

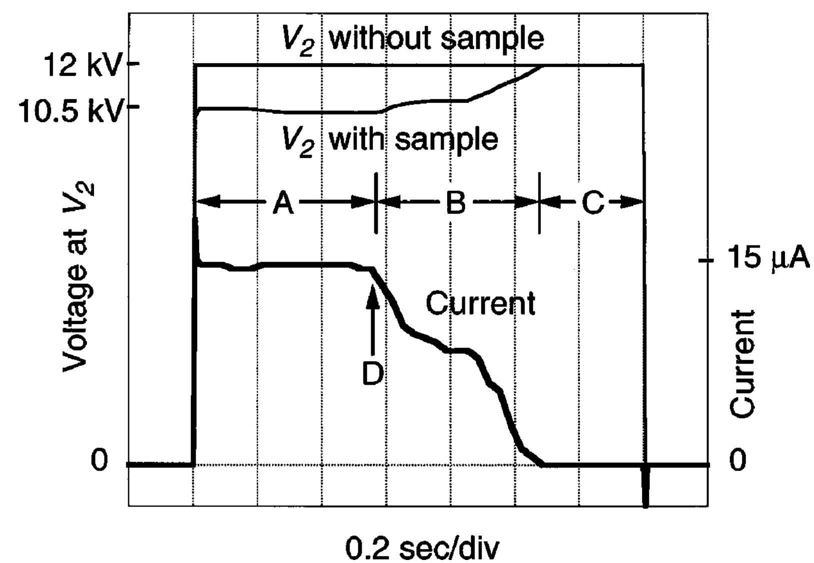


Myers et al. JOS **12**, 2102(1995)

Kontaktierung der Oberflächen

Schaltung und Spannungsverlauf





Vorteile von periodisch gepolten Medien

- Die ω und 2ω Polarisationen können so gewählt werden, dass die Kopplung über das größte Element des Tensors $\chi^{(2)}$ geht.
  Verbesserungen um bis zu einem Faktor 20 sind möglich.
- keine Einschränkungen in der Wellenlänge.
- Auch Zugang zu Koeffizienten höherer Ordnung
- Flexibilität des strukturierten Elektrodengitters:
    - multiple Wellenlängen / Breitbandphasenanpassung
    - fächerförmige Strukturen
- Vielfältiger Einsatz zur Verstärkung nichtlinearer Effekte (OPOs, höhere Harmonische, ...)

Erzeugung von Summenfrequenzen

$$E(t) = E_1 e^{-i\omega_1 t} + E_2 e^{-i\omega_2 t} + \text{c.c.}$$

$$P^2(t) = \epsilon_0 \chi^{(2)} E^2(t)$$

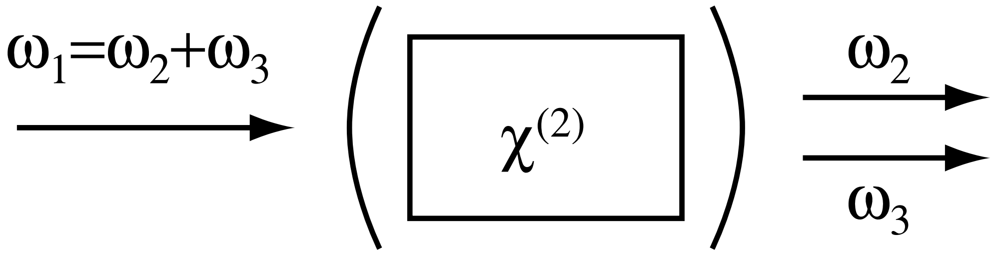
$$\begin{aligned} P^{(2)}(t) = \epsilon_0 \chi^{(2)} \big(& 2E_1^2 \cos 2\omega_1 t + && \text{(SHG)} \\ & +2E_2^2 \cos 2\omega_2 t + && \text{(SHG)} \\ & +4E_1 E_2 \cos(\omega_1 t + \omega_2 t) + && \text{(SFG)} \\ & +4E_1 E_2 \cos(\omega_1 t - \omega_2 t) + && \text{(DFG)} \\ & +2(E_1^2 + E_2^2) \big) && \text{(OR)} \end{aligned}$$

Optische Parametrische Oszillatoren

Parametrischer Prozess: nach dem Prozess entspricht der Quantenmechanische Zustand des Systems den Zustand vor dem Prozess.

Im Falle der Erzeugung von Differenzfrequenzen: Strahlung bei Frequenzen ω_2 und ω_3 kann die Emission weiterer Photonen bei diesen Frequenzen stimulieren.

➠ Einbau des nichtlinearen Kristalls in einen Resonator.

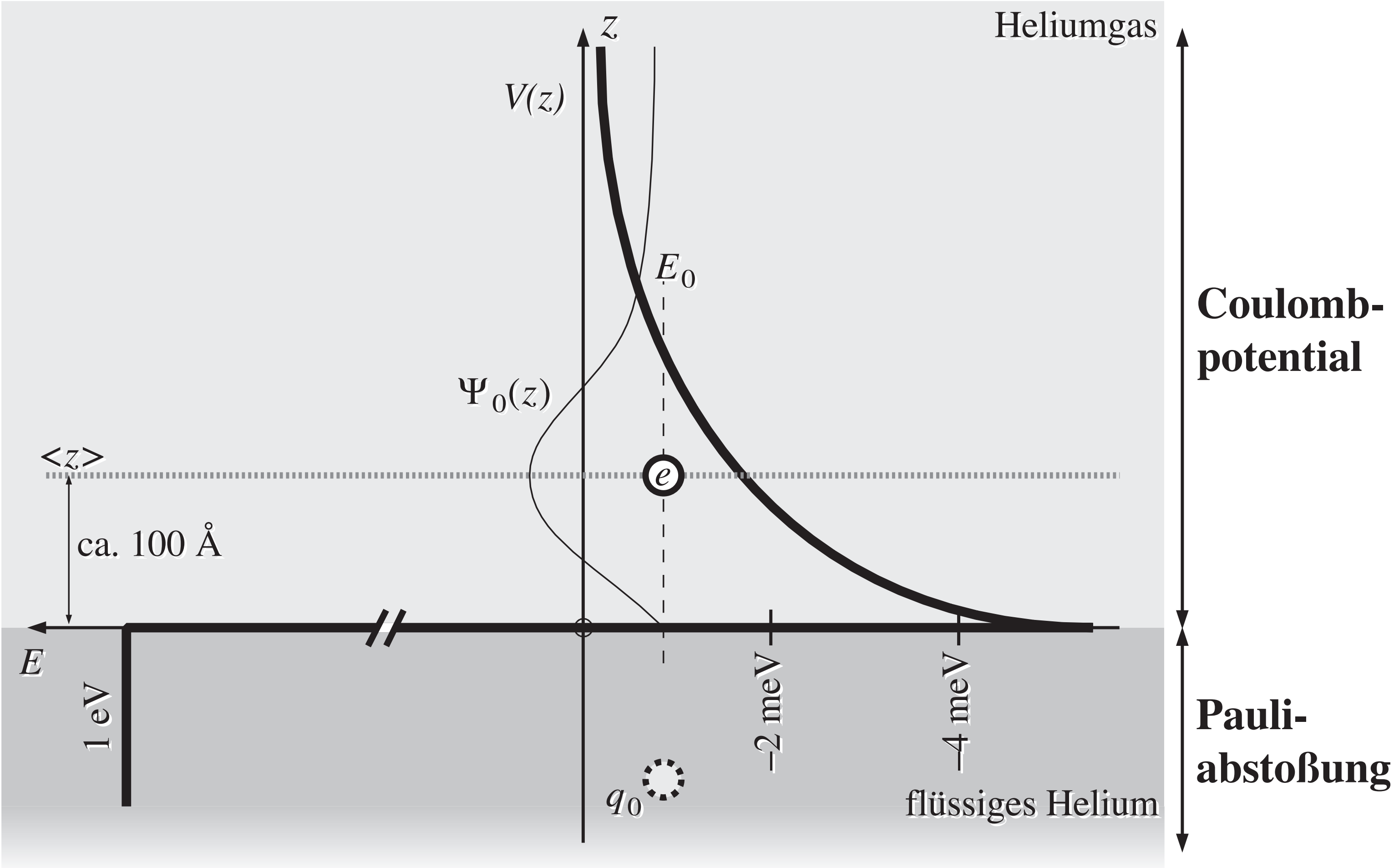


Hochfrequenzuntersuchungen von zweidimensionalen Elektronensystemen auf dünnen Heliumfilmen

Agenda

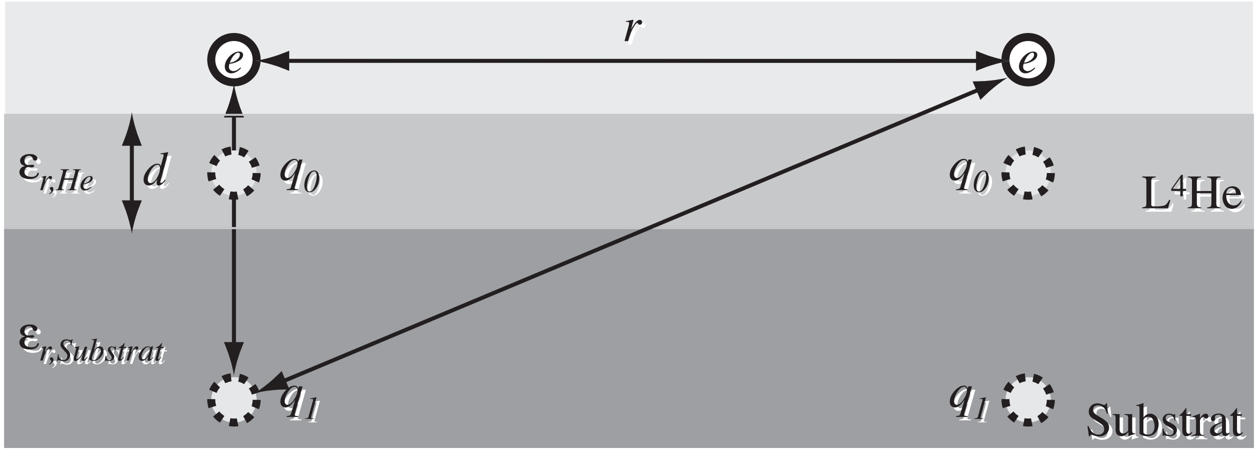
- Einführung in das System "Elektronen auf Helium"
  - Grundlagen
  - Bestimmung der Elektronendichte
- Experiment: Beladung von Heliumfilmen mit Elektronen
  - Experimenteller Aufbau und Methoden
  - Ergebnisse für geringe Elektronendichten
  - Hohe Elektronendichten und Probleme mit der Reproduzierbarkeit
- Das Zwei-Komponenten-Modell von Elektronen
  - Allgemeine Einführung
  - Erklärung von Messungen der Zyklotronresonanz
- Zusammenfassung und Ausblick

Elektronen auf flüssigem Helium



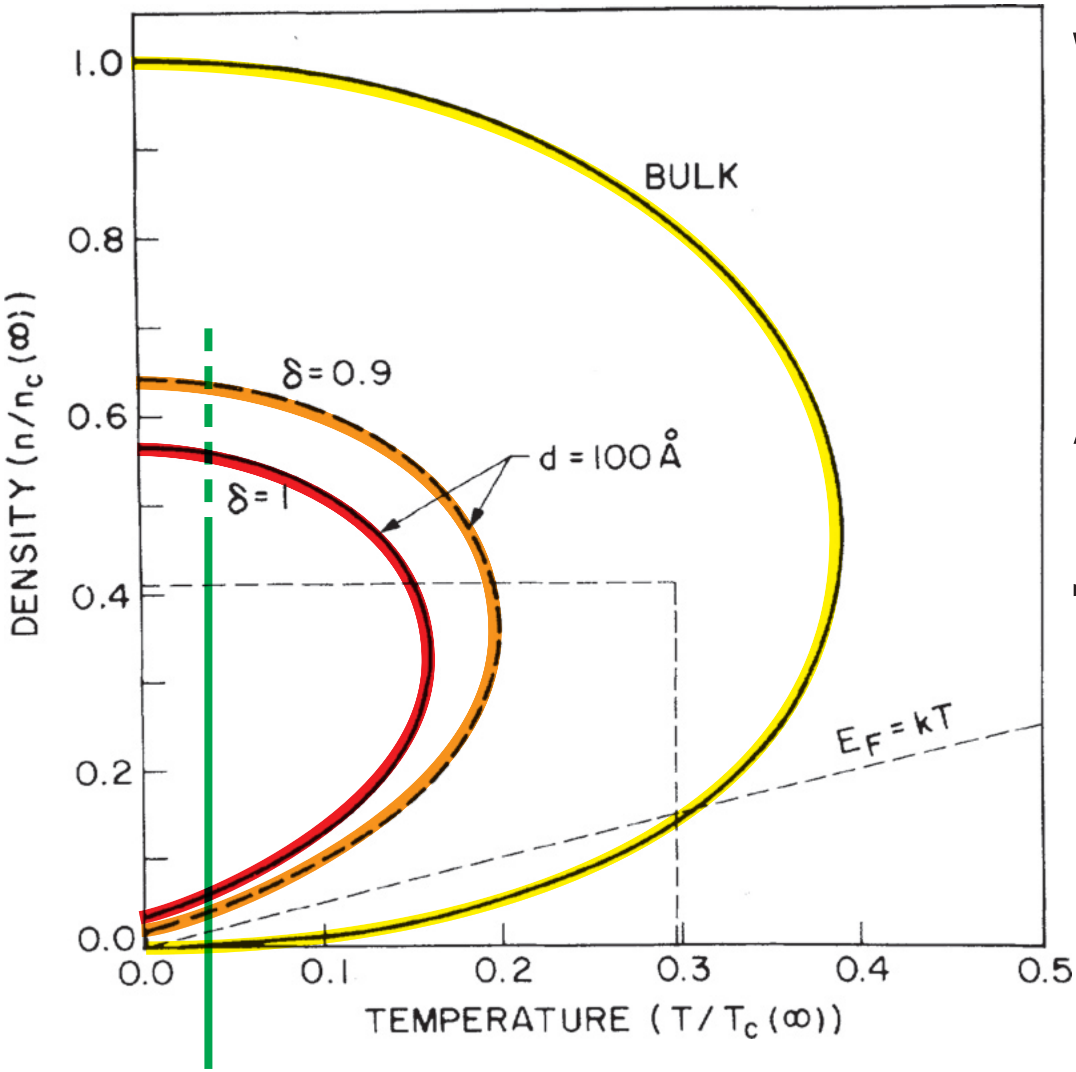
$$V(z) = \begin{cases} V_0 & z \leq 0 \\ -\frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\frac{q_0\,e^2}{z+\beta} & z > 0 \end{cases} \quad \text{mit:} \quad \begin{aligned} V_0 &\approx 1\text{eV} \\ q_0 &= \frac{\epsilon_{\mathrm{L4He}}-1}{4(\epsilon_{\mathrm{L4He}}+1)} \end{aligned}$$

Elektronen auf dünnen Heliumfilmen



- Stabilisierung des Films durch van-der-Waals-Kräfte
  ➙ höhere Elektronendichten erreichbar
- Elektron-Elektron Wechselwirkung bekommt Dipolcharakter
  ➙ Veränderung des Phasendiagramms
- stärkere Bildladung im Substrat
  ➙ Bindung der Elektronen wird stärker
- Oberflächenrauigkeit beeinflusst das System
  ➙ Auswirkungen auf die Messergebnisse

Das Phasendiagramm eines 2DES auf Helium



experimenteller Pfad

Wichtige Energien:

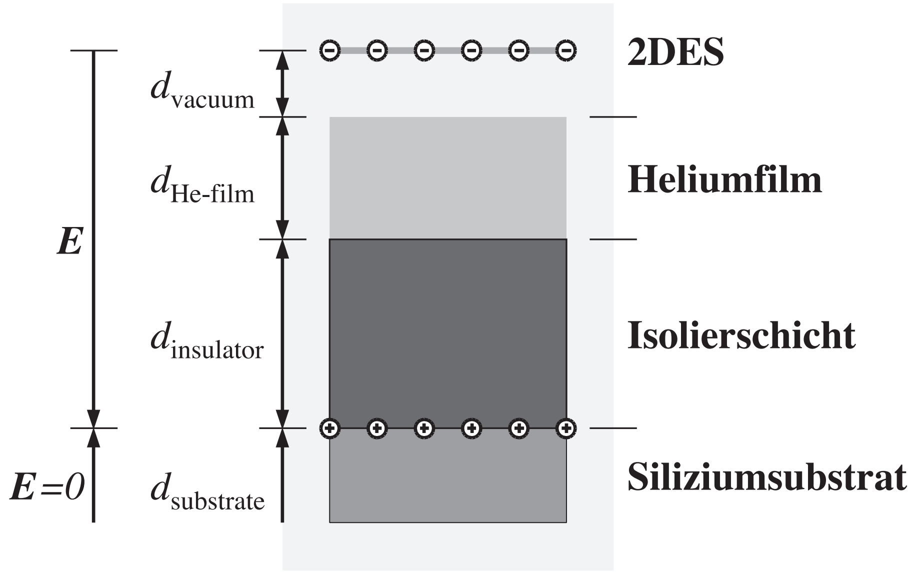
$$
\begin{aligned}
\text{therm. Energie} &= const. \\
\text{Coulombenergie} &\propto \sqrt{n} \\
\text{Fermienergie} &\propto n
\end{aligned}
$$

Abschätzung von F. Peeters, PRL **50**, 2021(1983):

→ $T_c(\infty) = 33\ \text{K}$

$n_c(\infty) = 2.4 \times 10^{16}\ \text{m}^{-2}$

Bestimmung der Elektronendichte



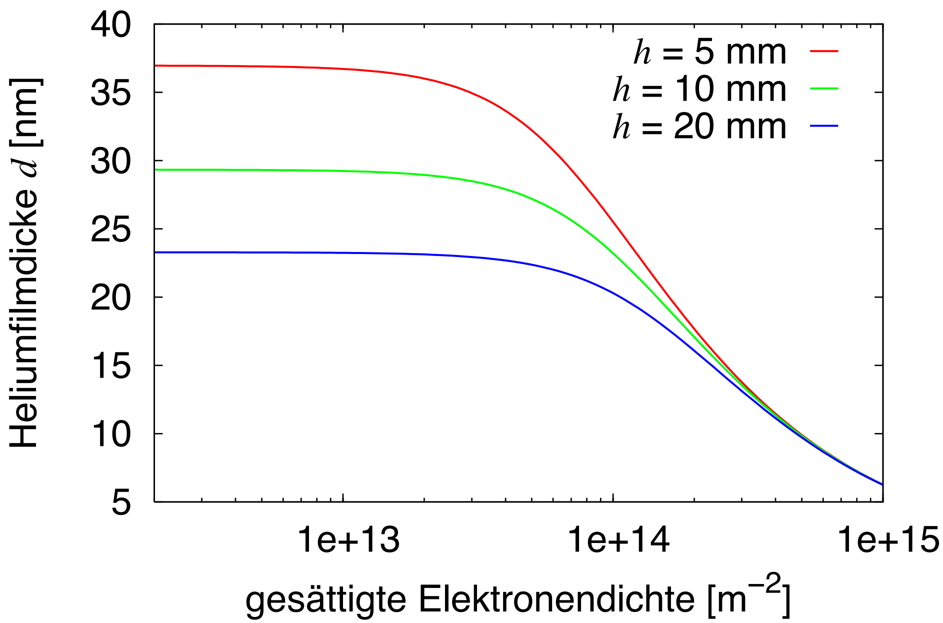
Sättigung des 2DES:
Elektrisches Feld oberhalb verschwindet

$$n_s = \frac{Q}{eA} = \frac{U_{clamp}\varepsilon_0}{e} \frac{1}{\frac{d_{vacuum}}{1} + \frac{d_{He\text{-}film}}{\varepsilon_{r,He\text{-}film}} + \frac{d_{insulator}}{\varepsilon_{r,\ insulator}}}$$

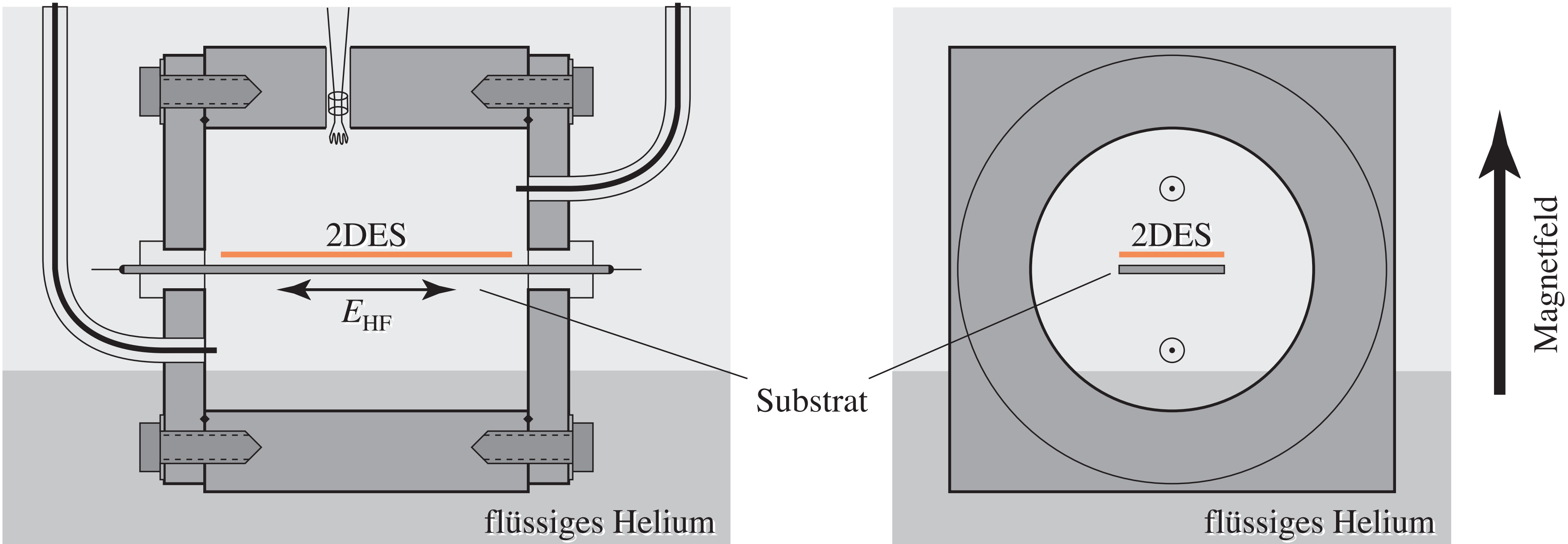
Abhängigkeit der Filmdicke von der Elektronendichte:

$$d = d_0 \left(1 + \frac{n_s^2 e^2}{2\varepsilon_0 \rho g h}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

Etz et. al., PRL **53**, 2567 (1984)

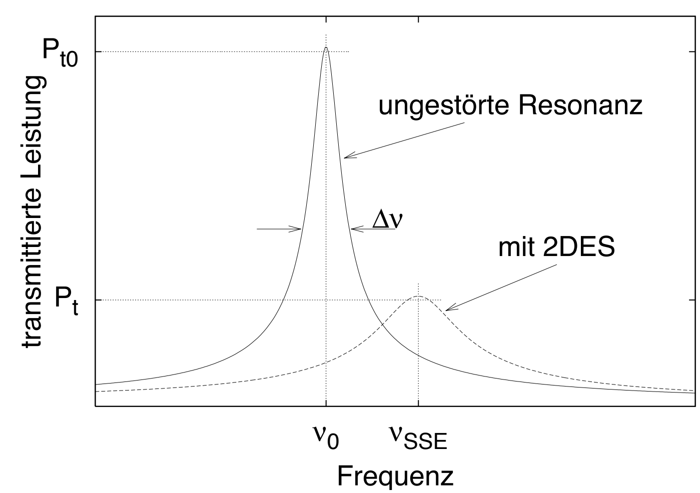


Aufbau des Experiments

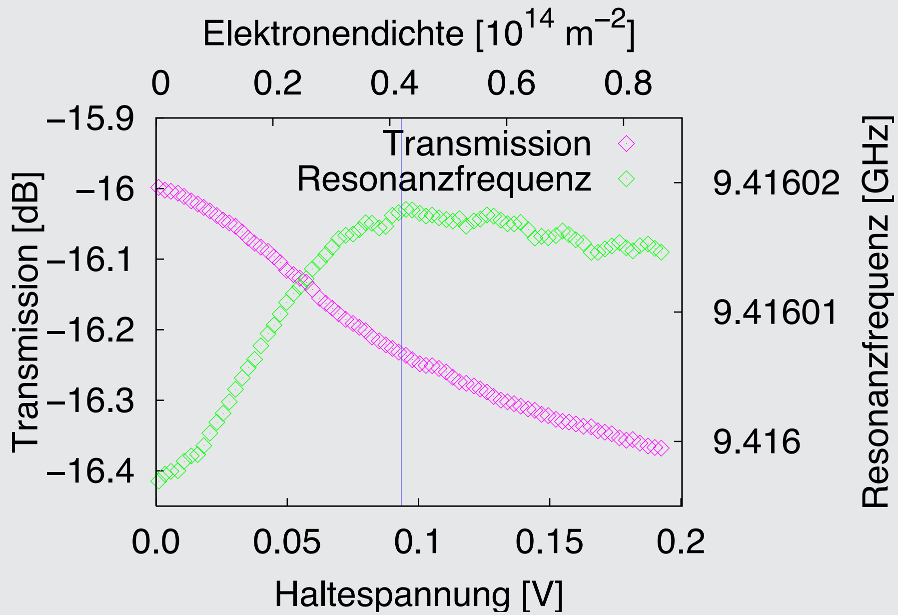


Mikrowellenresonator in vakuumdichter Zelle im Badkryostat:

- Resonanzfrequenz ≈ 10 GHz
- Messung der Transmission im Bereich der Resonanz
- neuer Messaufbau: Frequenzsweeps mit Kurvenanpassung der Resonanzlinie



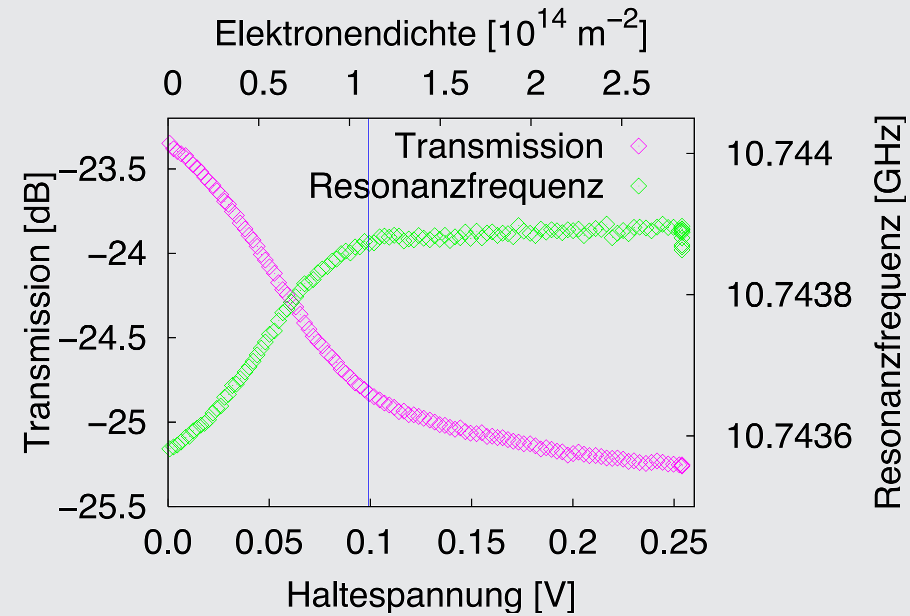
Analyse der Messdaten



PMMA/Silizium Substrat

T = 1.29 K, Γ=117±12

$n_{WC} = 3.9 \times 10^{13}\ m^{-2}$



SiO_2/Silizium Substrat

T = 1.30 K, Γ=123±10

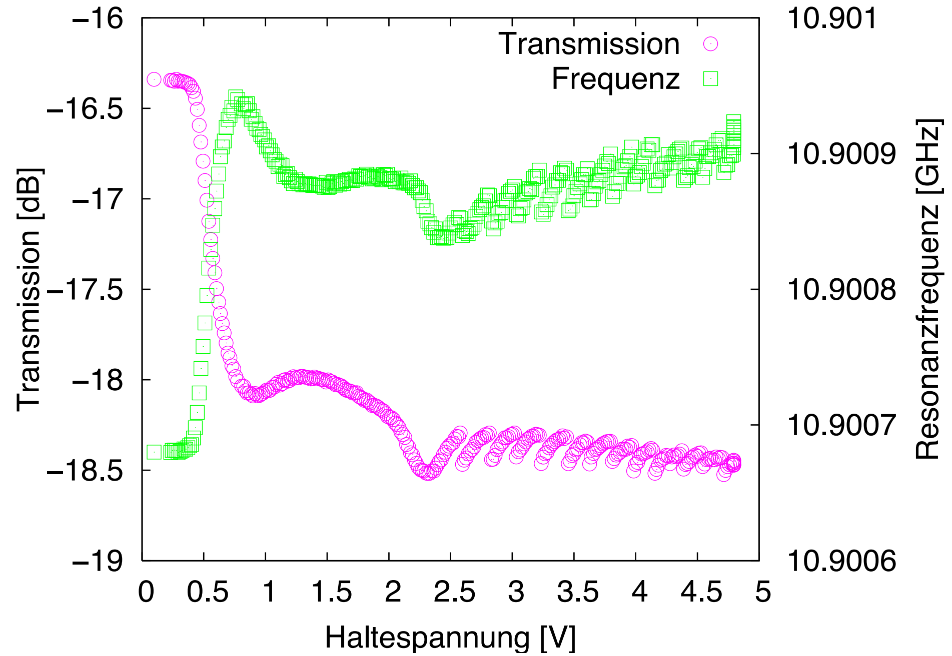
$n_{WC} = 1.2 \times 10^{14}\ m^{-2}$

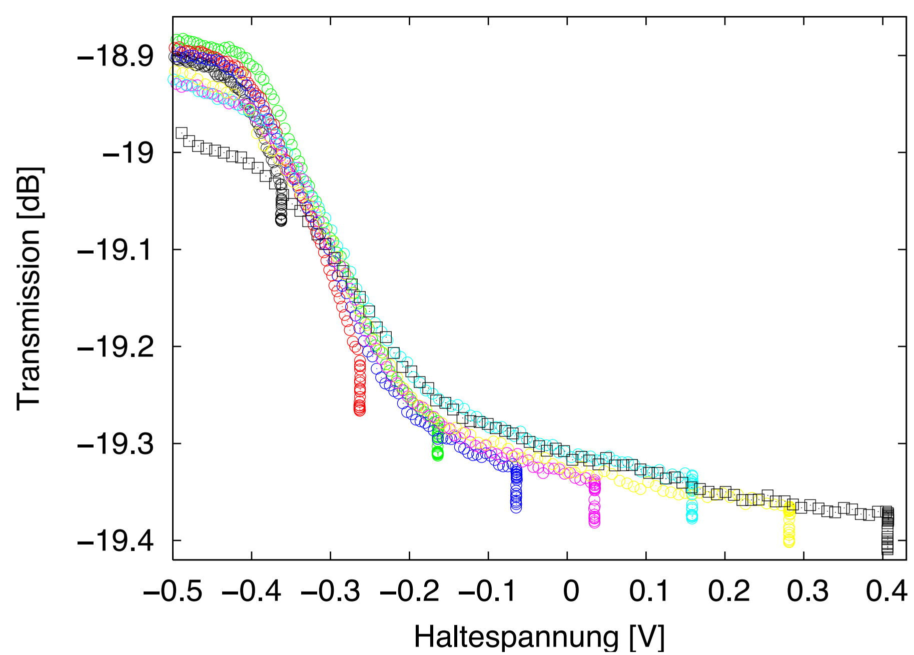
hohe Elektronendichten

Auftretende Schwierigkeiten:

- plötzliches Durchbrechen von Elektronen auf das Substrat
- mit sinkender Filmdicke steigt die Tunnelwahrscheinlichkeit
- auch lokalisierte Elektronen kön-nen zur Absorption beitragen
- Sättigungsdichte wird aufgrund von Elektronenverlusten nicht errreicht

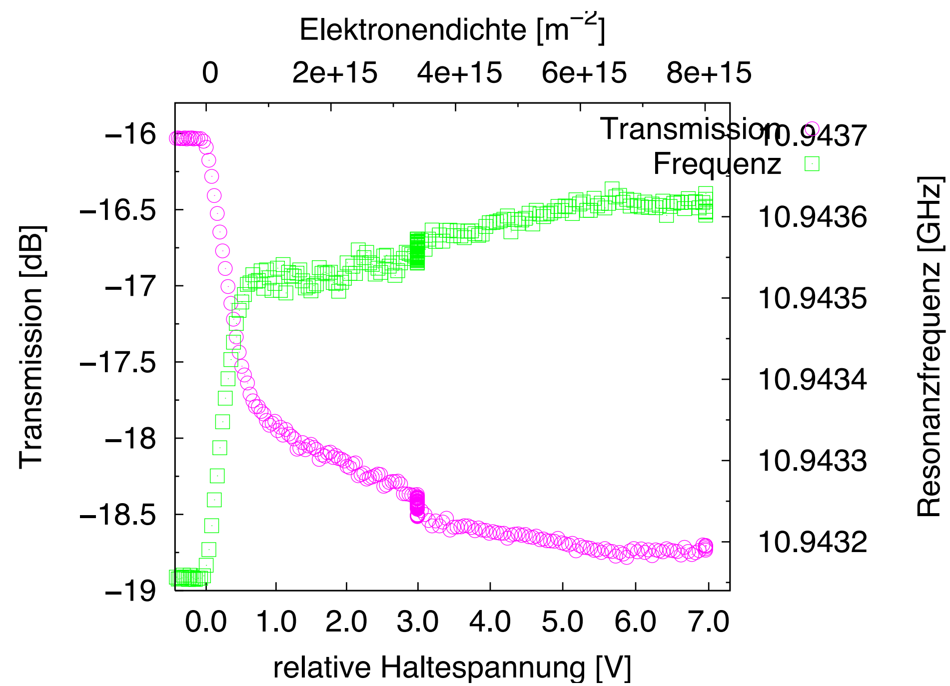
Erkennung dieser Prozesse durch Serien von Beladevorgängen

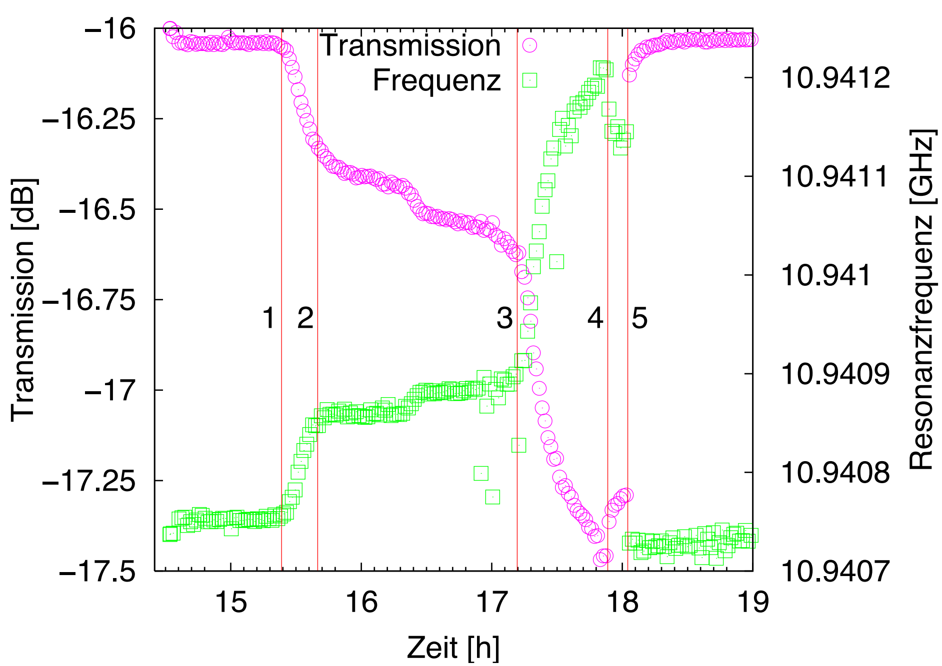


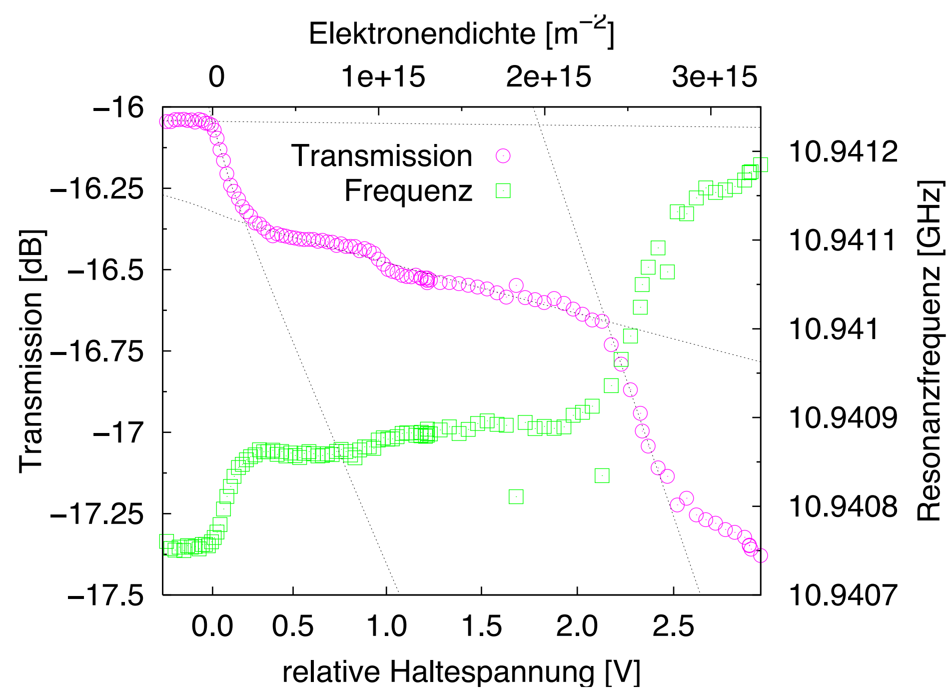


hohe Elektronendichten

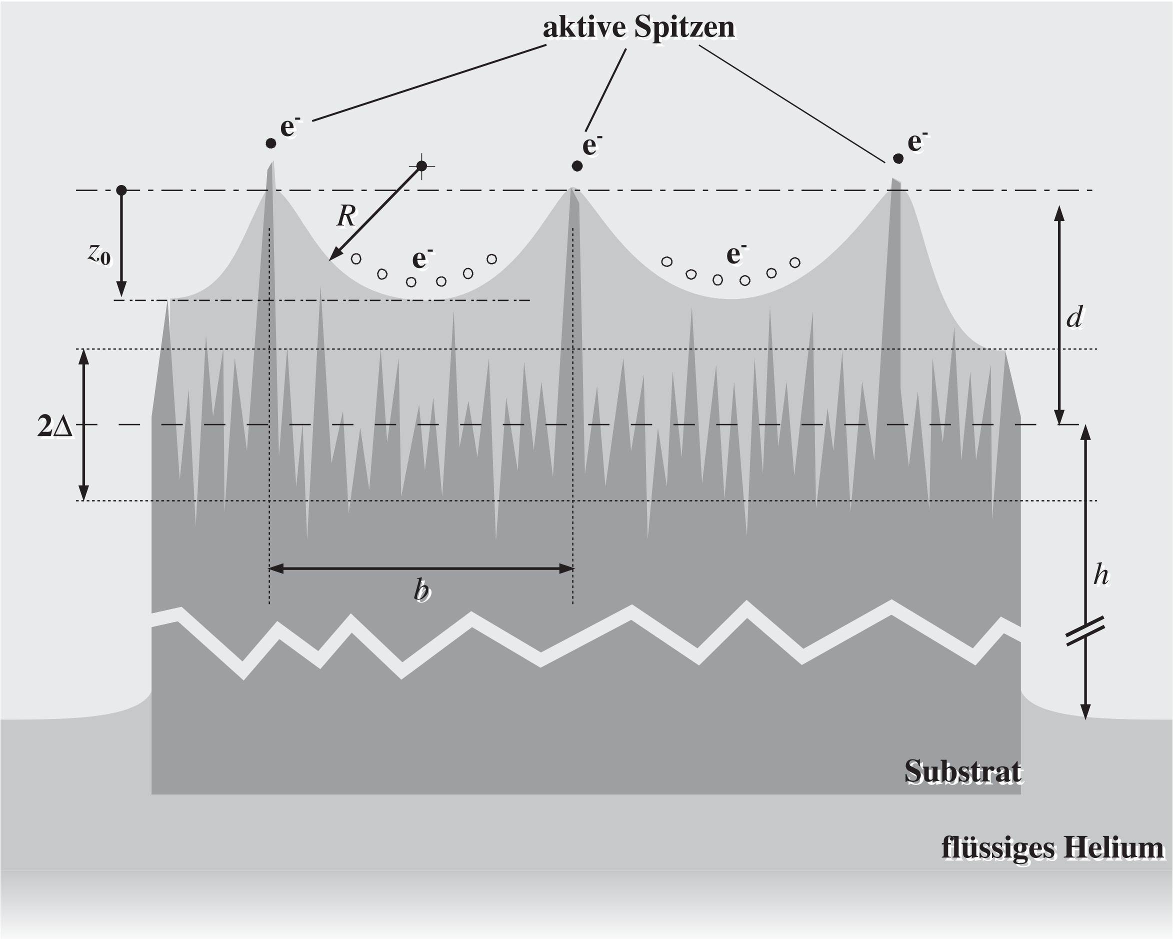
verschiedene Verhaltensweisen werden sichtbar







Das Zweikomponentenmodell von Elektronen auf dünnen Heliumfilmen



- freie und lokalisierte Elektronen liefern einen Beitrag
- Modellierung der Oberfläche und des Heliumfilms

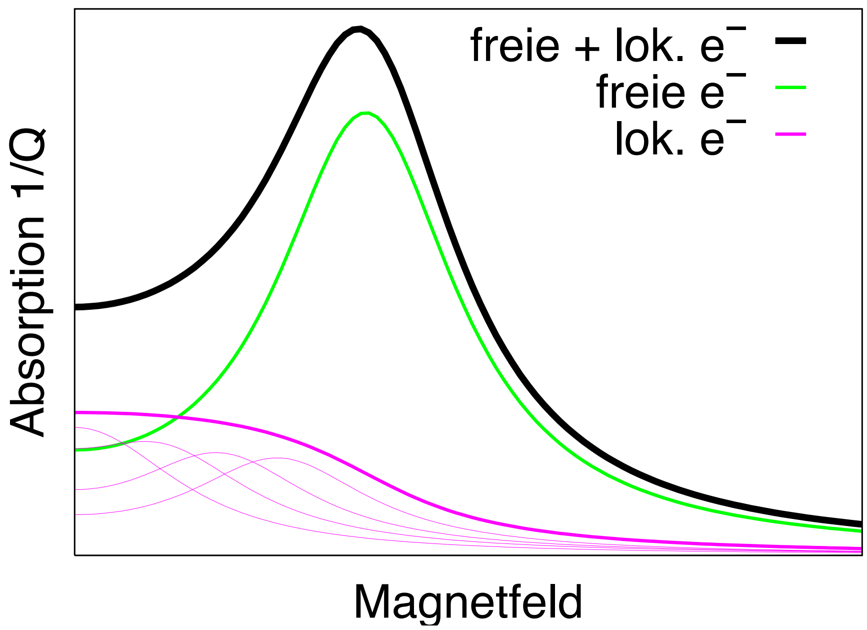
Anwendung des Zweikomponentenmodells: Zyklotronresonanz auf dünnen Heliumfilmen

Die Gesamtabsorption setzt sich aus der Absorption der freien und lokalisierten Elektronen zusammen:

$$Q^{-1} = Q_e^{-1} + Q_l^{-1}$$

Der Anteil freier Elektronen ist nach Drude gegeben durch:

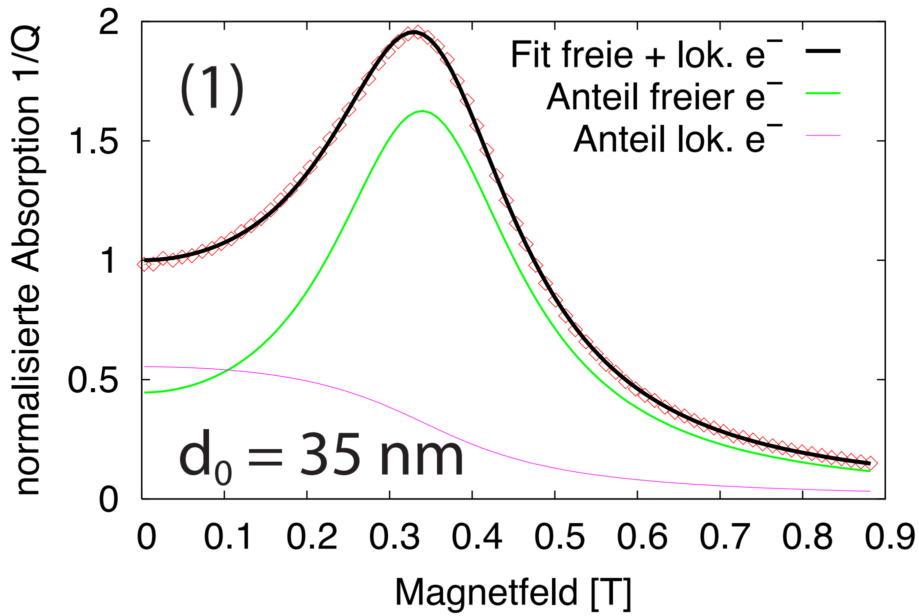
$$Q_e^{-1} \propto n_e \frac{1+z+x}{(1-z+x)^2+4z}$$



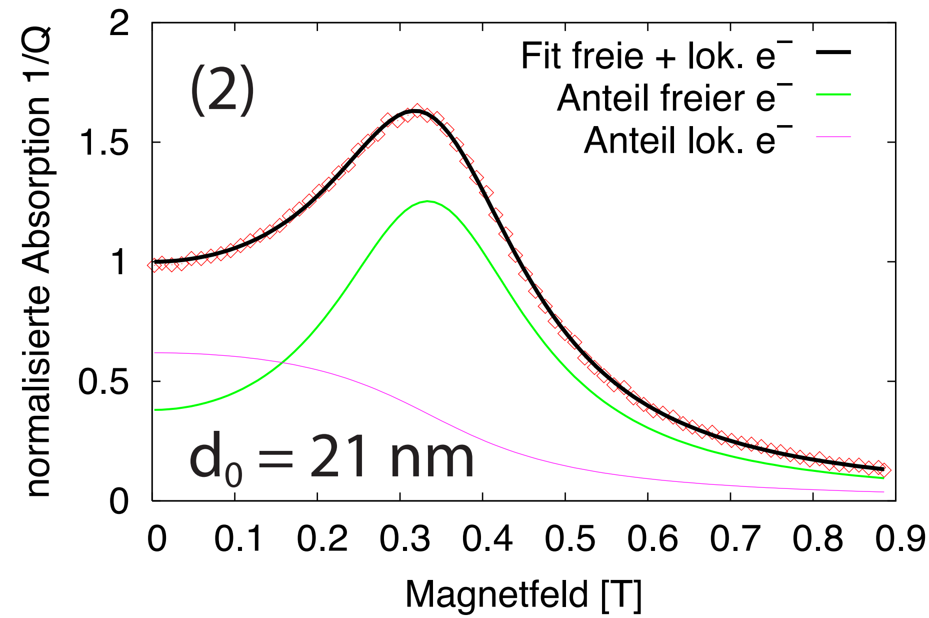
Der Anteil der lokalisierten Elektronen resultiert aus der modellierten Verteilung der Lokalisierungspotentiale:

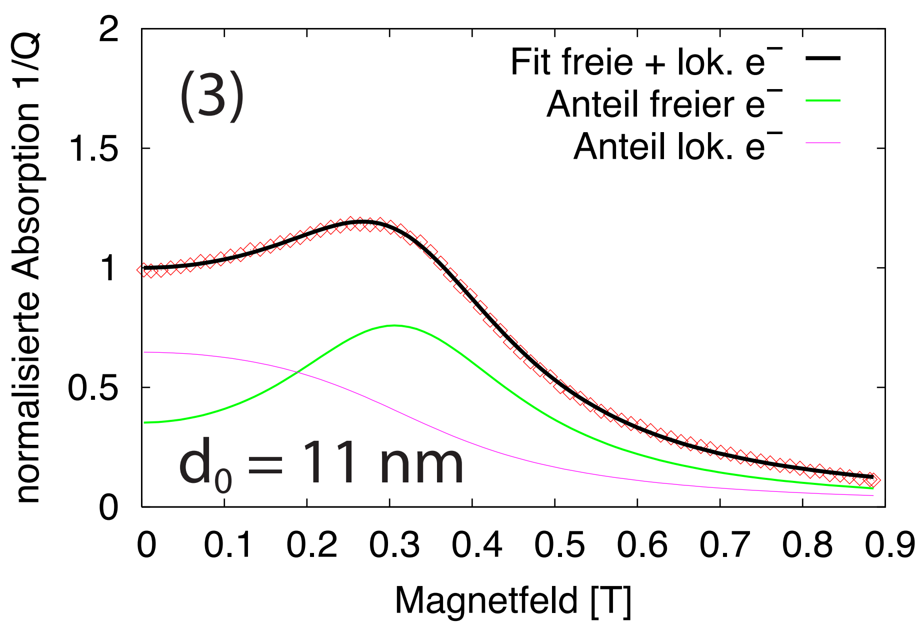
$$Q_l^{-1} \propto n_l \frac{\arctan \frac{\sqrt{z}}{1+x+\sqrt{xz}} + \arctan \frac{\sqrt{z}}{(1+x)\sqrt{z}-z\sqrt{x}} + c(z,x)}{2\sqrt{z}}$$

Zyklotronresonanz von 2DES auf dünnen He-Filmen



Verringerung der Filmdicke





Analyse der Ergebnisse

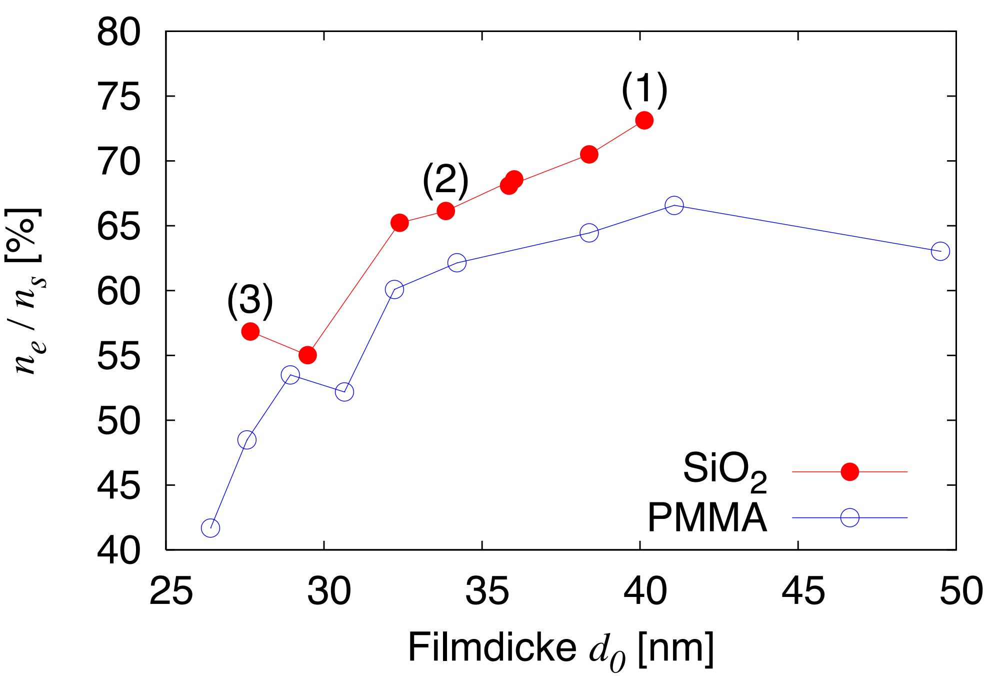
Kurvenanpassung an die gemessenen Daten durch

$$Q^{-1} = \boxed{A} Q_e^{-1}(\boxed{\omega}, \omega_c, \boxed{\tau}) + \boxed{A_l} Q_l^{-1}(\omega, \omega_c, \tau) + \boxed{c_0}$$ freie Parameter

Die Anteile freier und lokalisierter Elektronen ergeben sich aus dem Verhältnis von Q_e^{-1} und Q_l^{-1}:

Qualitative Analyse:

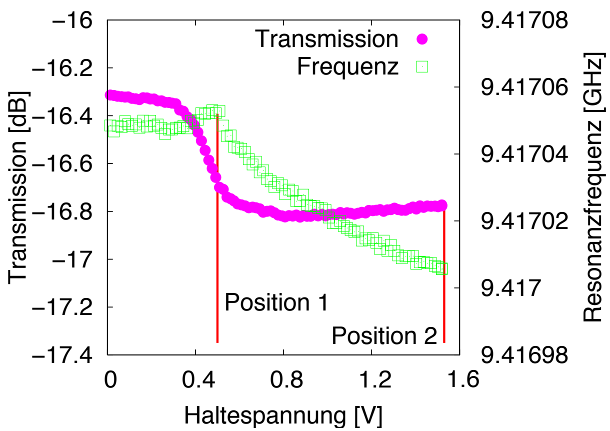
- SiO_2 ist glatter als PMMA
- Die Modellrauigkeit liegt im erwarteten Bereich

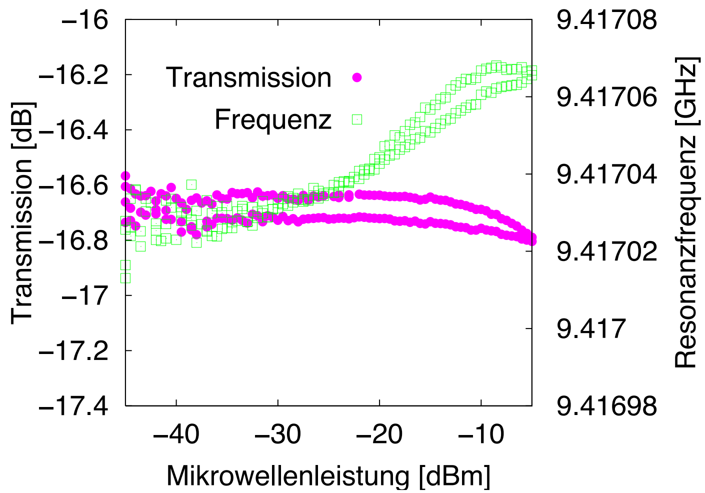


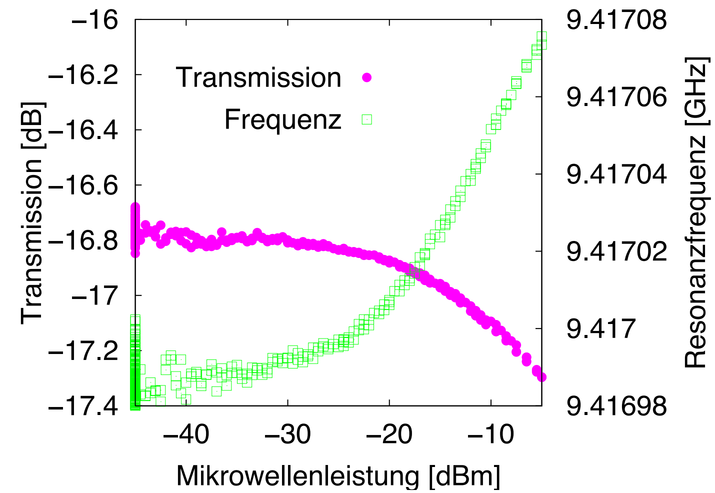
Zusammenfassung

- Auf dünnen Heliumfilmen sind Elektronendichten in der Größenordnung $10^{14}\ \mathrm{m}^{-2}$ erreichbar.
- Zu höheren Elektronendichten hin muss durch Beladeserien sichergestellt werden, dass Artefakte durch Elektronenverlust und Beladung der Substratoberfläche entdeckt werden.
- Sehr glatte, saubere Substrate sind die Voraussetzung für ein hohes Signal-/Rauschverhältnis der Messergebnisse.
- Die Auswertung von Messungen der Zyklotronresonanz mit dem Zwei-Komponenten-Modell kann zur Charakterisierung der Substratoberflächen verwendet werden.
- Die Messmethode mit dem Netzwerkanalysator bietet neue Möglichkeiten.

Abhängigkeit von der Anregungsstärke

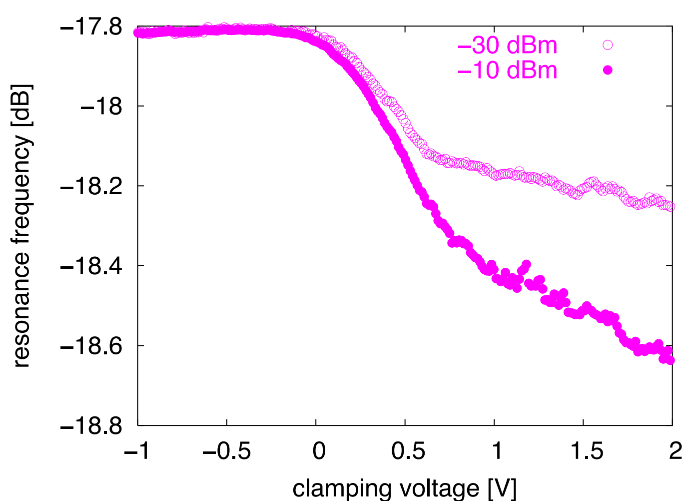


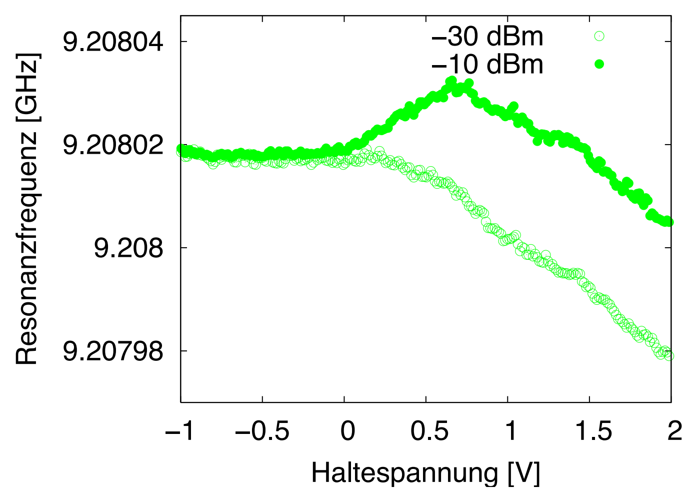




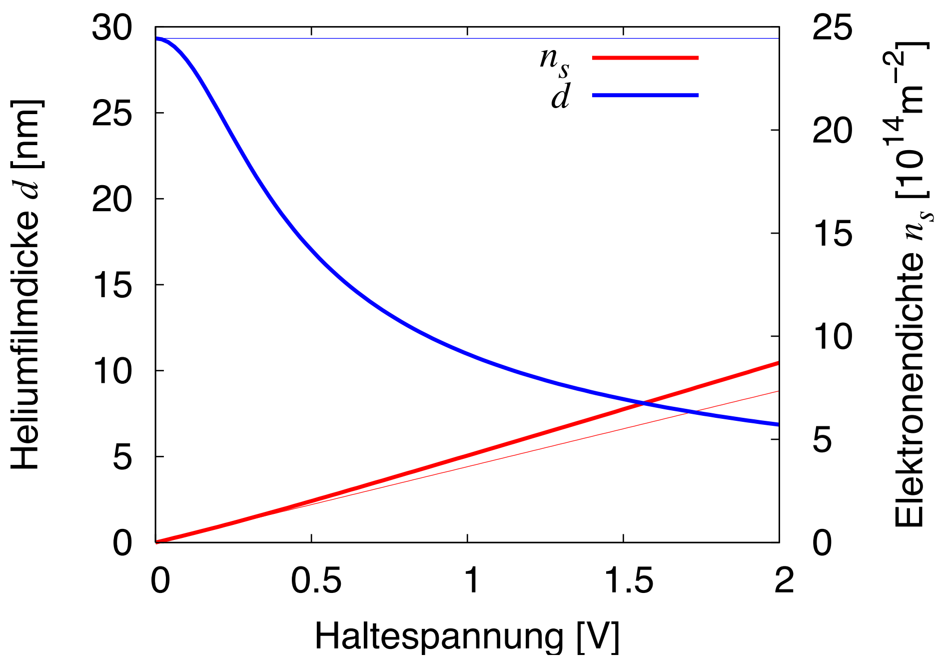
Sweep der Anregungsstärke in der flüssigen und kristallinen Phase

Beladung und Messung mit 2 verschiedenen Anregungsstärken





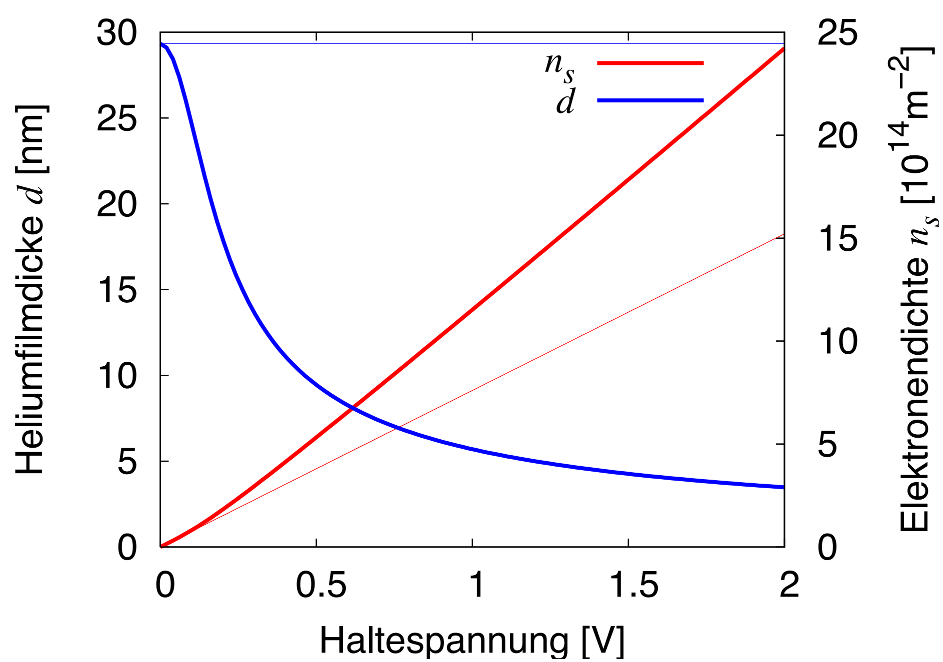
Bestimmung der Elektronendichte



Ergebnisse der selbstkonsistenten Rechnung

Elektronen auf Helium auf 200 nm PMMA

($\varepsilon = 1.7$)



Elektronen auf Helium auf 200 nm SiO_2

($\varepsilon = 5$)